

Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire

Alain Haraux*

Manuscrit reçu en avril 1988

Résumé

Soit Ω un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et B une bande ouverte de $\mathbb{R}^2$ parallèle à l'un des côtés de Ω telle que $\omega = \Omega \cap B \neq \emptyset$. Pour tout $T > 0$ et tout état initial $(y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, il existe un "contrôle" $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ tel que $\text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega$ et que la solution généralisée du problème : $y_{tt} + \Delta^2 y = h$ dans $(0, T) \times \Omega$; $y = \Delta y = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$ avec condition initiale $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_1)$ vérifie $y(T) = y'(T) = 0$.

Abstract

Let Ω be a rectangle in $\mathbb{R}^2$ and B an open strip in $\mathbb{R}^2$ parallel to one side of Ω such that $\omega = \Omega \cap B \neq \emptyset$. For any $T > 0$ and any initial state $(y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, there exists a "control" $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ with $\text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega$ such that the generalized solution y of the problem: $y_{tt} + \Delta^2 y = h$ in $(0, T) \times \Omega$; $y = \Delta y = 0$ on $(0, T) \times \partial\Omega$ with initial condition $(y(0), y'(0)) = (y_0, y_1)$ satisfies $y(T) = y'(T) = 0$.

1 Introduction

Dans cet article on désigne par Ω un rectangle de $\mathbb{R}^2$. On considère une bande ouverte B de $\mathbb{R}^2$ parallèle à l'un des côtés de Ω et on suppose que $\omega = \Omega \cap B \neq \emptyset$. Étant donné un nombre $T > 0$, on cherche à résoudre le problème

$$(1) \quad y_{tt} + \Delta^2 y = h(t, x) \text{ dans } (0, T) \times \Omega; \quad y = \Delta y = 0 \text{ sur } (0, T) \times \partial\Omega$$

$$(2) \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1; \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

avec les conditions suivantes sur h

$$(3) \quad h \in L^2((0, T) \times \Omega); \quad \text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega.$$

Les données initiales y_0 et y_1 sont arbitraires dans l'espace d'énergie naturel associé au problème, c'est-à-dire que l'on suppose

$$(4) \quad y_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \quad y_1 \in L^2(\Omega).$$

*Analyse Numérique, Tour n°55-65, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4 place Jussieu, Paris

Étant donné $(y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, il s'agit donc de déterminer un contrôle $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ agissant uniquement sur la “tranche” $\omega = \Omega \cap B$ et qui amène la solution de (1) de données initiales (y_0, y_1) à l'équilibre $(0, 0)$. Comme le support de h est limité dans la direction orthogonale à celle de B , on peut parler ici d'un problème de contrôlabilité exacte “semi-interne”, en quelque sorte à mi-chemin entre celui du contrôle distribué partout dans Ω (i.e. $\omega = \Omega$) et celui d'un contrôle interne correspondant au cas où $\omega \Subset \Omega$.

Dans le cas d'une membrane vibrante rectangulaire gouvernée par l'équation des ondes

$$(5) \quad v_{tt} - \Delta v = h(t, x) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \quad v(t, x) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega,$$

il a été établi dans [3] que le problème de contrôlabilité exacte “semi-interne” est mal posé et qu'on ne peut pour aucune valeur finie du temps T ramener à l'équilibre une membrane vibrante d'état initial quelconque $(y_0, y_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ au moyen d'un contrôle $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ agissant uniquement sur une tranche $\Omega \cap B \neq \Omega$. D'autre part dans [2], C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ont étudié un problème plus général relatif à (5) et démontré l'impossibilité de contrôler une membrane vibrante de configuration initiale quelconque dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ même par une action de type distribution sur une tranche $\Omega \cap B \neq \Omega$. Dans le même esprit, les résultats récents de J. Rauch et J. Sjöstrand [10] impliquent que les états (y_0, y_1) contrôlables par une action L^2 sur une tranche $\Omega \cap B \neq \Omega$ doivent satisfaire des conditions de régularité “microlocale” de type analytique dans la direction de la bande B .

Dans ce travail nous établissons que le cas d'une plaque est meilleur que celui de la membrane en ce sens que le problème de contrôlabilité exacte “semi-interne” est ici bien posé pour tout $T > 0$. Ceci améliore le résultat obtenu dans un cadre général par E. Zuazua [11] et qui dans le cas du rectangle impliquait la contrôlabilité exacte de tout état initial d'énergie finie lorsque ω contient une partie de la forme $\Omega \cap W$ où W est un ouvert qui contient deux côtés adjacents. La démonstration de notre résultat principal repose de façon fondamentale sur certaines propriétés de localisation des séries trigonométriques lacunaires, et bien entendu c'est la dimension du domaine qui joue ici un rôle majeur. Le problème de la contrôlabilité exacte interne reste ouvert et la réponse à cette question semble délicate même dans le cas le plus simple du carré.

2 Cadre fonctionnel et énoncé du résultat

Commençons par un rappel concernant le problème aux valeurs initiales

$$(6) \quad \begin{cases} y_{tt} + \Delta^2 y = h(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ y = \Delta y = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \end{cases}$$

Il résulte assez immédiatement de la théorie des équations d'évolution abstraites de type hyperbolique (cf. e.g. [9]) que pour tous $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ et $(y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, il existe une fonction $y : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et une seule qui vérifie les conditions

$$(7) \quad y \in C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{2,2}([0, T]; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')$$

$$(8) \quad y_{tt} + \Delta^2 y = h(t, x) \quad \text{dans } W^{2,2}([0, T]; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]')$$

$$(9) \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

On dira que y est la solution (généralisée) de (6) de données initiales (y_0, y_1) . Cette notation est motivée par le fait que si on suppose de plus

$$(10) \quad y_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \Delta y_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega; \quad y_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$(11) \quad h \in C^1([0, T], L^2(\Omega))$$

Alors y vérifie les conditions plus fortes

$$(12) \quad y \in C([0, T], H^4(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, T], L^2(\Omega))$$

$$(13) \quad \Delta y \in C^1([0, T], H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

Il existe un théorème analogue pour le problème aux valeurs finales

$$(6^*) \quad \begin{cases} y_{tt} + \Delta^2 y = h(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ y = \Delta y = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ y(T) = y_0, \quad y'(T) = y_1. \end{cases}$$

Tenant compte de ce résultat, le problème de contrôlabilité exacte peut s'énoncer comme suit: étant donné $(y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, trouver h vérifiant les conditions (3) et tel que l'unique solution y de (6) vérifie la condition finale $y(T) = y'(T) = 0$. Le résultat de cet article peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème 1. *Soit Ω un rectangle de $\mathbb{R}^2$, B une bande ouverte de $\mathbb{R}^2$ parallèle à l'un des côtés de Ω et telle que $\omega = \Omega \cap B \neq \emptyset$. Alors, pour tout $T > 0$ et $\forall (y_0, y_1) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$, il existe h vérifiant les conditions (3) et tel que l'unique solution y de (6) vérifie la condition finale $y(T) = y'(T) = 0$.*

3 Démonstration du Théorème 1

Conformément aux principes généraux de la méthode HUM de J.-L. Lions (cf. e.g. [7]-[8]) et aussi [3] pour le cas particulier de la contrôlabilité interne) il nous suffit d'établir l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que toute solution de l'équation homogène

$$(14) \quad v_{tt} + \Delta^2 v = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega; \quad v = \Delta v = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

dont les données initiales appartiennent à un sous-espace dense de $[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times L^2(\Omega)$ vérifie l'inégalité

$$(15) \quad \int_0^T \int_{\omega} v_t^2(t, x, y) \, dx \, dy \geq \delta \int_{\Omega} |\Delta v(0, x, y)|^2 + |v_t(0, x, y)|^2 \, dx \, dy.$$

Par isométrie et changement d'échelle, on peut évidemment se ramener au cas où

$$\Omega =]0, l[\times]0, \pi[; \quad \omega =]a, b[\times]0, \pi[\quad \text{avec } 0 \leq a < b \leq l$$

Les fonctions propres de Δ^2 dans $H_0^2(\Omega)$ avec les conditions aux limites $u = \Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$ sont les fonctions

$$w_{m,n}(x, y) = \sin(m\pi \frac{x}{l}) \sin(ny)$$

et on a

$$\int_{\Omega} w_{m,n}^2(x, y) \, dx \, dy = \left(\int_0^l \sin^2 m\pi \frac{x}{l} \, dx \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 ny \, dy \right) = \frac{\pi l}{4} =: c_0 > 0.$$

tandis que

$$(16) \quad \int_{\omega} w_{m,n}^2(x, y) \, dx \, dy \geq c_1 > 0, \quad \forall (m, n).$$

La forme générale des solutions de (14) est

$$(17) \quad v(t, x, y) = \sum_{m,n} v_{m,n} \cos[t(m^2\pi^2l^{-2} + n^2) + \alpha_{m,n}] w_{m,n}(x, y).$$

On peut se contenter de considérer les solutions v telles que $v_{m,n} = 0$ pour $m + n$ assez grand, alors en tenant compte des relations d'orthogonalité

$$\int_0^\pi \sin ny \sin py \, dy = \frac{\pi}{2} \delta_{n,p} \text{ pour } n, p \text{ entiers}$$

on obtient pour tout $t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} v_t^2(t, x, y) \, dx \, dy &= c_2 \sum_n \int_a^b \left\{ \sum_m (m^2\pi^2l^{-2} + n^2) v_{m,n} \right. \\ &\quad \left. \times \sin[t(m^2\pi^2l^{-2} + n^2) + \alpha_{m,n}] \sin m\pi \frac{x}{l} \right\}^2 \, dx. \end{aligned}$$

Pour obtenir (15), il suffira d'établir le résultat suivant

Lemme 2. *Pour tout $T > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel $a > 0$, pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ de nombres réels et toute suite $\{u_n\}_{n \geq 1}$ de nombres réels nuls à partir d'un certain rang, on ait l'inégalité*

$$(18) \quad \int_0^T \left(\sum_n u_n \sin(t(n^2 + a^2) + \alpha_n) \right)^2 \, dt \geq \eta \sum_n u_n^2.$$

Dans la suite on notera $J = [0, T]$. Nous nous appuyerons de façon essentielle sur le résultat suivant, obtenu par A. E. Ingham [6] en 1936.

Théorème 3. *Soit J un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et une constante $\gamma > 0$. Supposons que l'on ait*

$$(19) \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z},$$

$$(20) \quad |J| > 2\pi/\gamma.$$

Alors il existe des constantes positives c, C dépendant uniquement du nombre $|J|\gamma - 2\pi$ telles que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls, on ait les inégalités

$$(21) \quad c \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 \, dt \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2,$$

où f est définie par la formule

$$(*) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}.$$

Pour établir le Lemme 2, une méthode naturelle est d'utiliser la généralisation suivante du Théorème 3, qui améliore légèrement le Théorème 2.1 de J. M. Ball et M. Slemrod [1].

Théorème 4. *Soit J un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et une constante $\gamma > 0$. Supposons que l'on ait*

$$(22) \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |n| \geq N,$$

$$(23) \quad |J| > 2\pi/\gamma,$$

$$(24) \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \rho > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Alors il existe des constantes positives c, C dépendant uniquement de γ, ρ, N et $|J|$ telles que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls, on ait, avec f défini par (*), les inégalités

$$(21) \quad c \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Démonstration. L'inégalité de droite est une conséquence immédiate du Théorème 3 puisqu'on n'ajoute qu'un nombre fini de fréquences. Plus précisément si $N \neq 0$, soit $E = \{n \in \mathbb{Z}, |n| \leq N\}$ et posons

$$h(t) = \sum_{n \notin E} a_n e^{i\mu_n t}, \quad k(t) = \sum_{n \in E} a_n e^{i\mu_n t}.$$

On peut écrire par exemple avec $M = 2N + 1$:

$$\forall t \in J, \quad |k(t)|^2 \leq M \sum_{n \in E} |a_n|^2 \implies \int_J |k(t)|^2 dt \leq M|J| \sum_{n \in E} |a_n|^2.$$

et du fait que $\mu_m - \mu_n \geq \gamma$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z} \setminus E$ tels que $m > n$ on a en utilisant l'inégalité de droite du Théorème 3

$$\int_J |h(t)|^2 dt \leq C \sum_{n \notin E} |a_n|^2$$

En combinant les deux dernières estimations on obtient finalement

$$(25) \quad \int_J |f(t)|^2 dt \leq 2 \left\{ \int_J |h(t)|^2 dt + \int_J |k(t)|^2 dt \right\} \leq 2(C + M|J|) \sum |a_n|^2.$$

L'inégalité de gauche peut s'établir en utilisant des résultats de Zygmund (cf. [1]). Nous en donnons ici une preuve élémentaire par récurrence sur le nombre p d'indices $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_{n+1} - \mu_n < \gamma$. Si $p = 0$, le résultat est donné par le Théorème 3. Supposons donc $p > 0$ avec $\mu_1 - \mu_0 < \gamma$: par l'hypothèse de récurrence le résultat est donc vrai pour les fonctions de la forme

$$(26) \quad g(t) = \sum_{n \neq 0} a_n e^{i\mu_n t}$$

Il est clair d'autre part que l'on peut se ramener au cas où $\mu_0 = 0$ en factorisant $\exp(i\mu_0 t)$ et en remplaçant tous les exposants μ_n par $\mu_n - \mu_0$. Supposons pour fixer les idées que $J = [0, T]$. Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $T' = T - \varepsilon > 2\pi/\gamma$. On a l'identité

$$(27) \quad f(t + \eta) - f(t) = \sum_{n \neq 0} a_n (e^{i\mu_n \eta} - 1) e^{i\mu_n t} \quad \text{pour tout } \eta \in [0, \varepsilon].$$

En intégrant (27) sur $(0, \varepsilon)$ on obtient la formule

$$(28) \quad \int_0^\varepsilon [f(t + \eta) - f(t)] d\eta = \sum_{n \neq 0} a_n \left[\frac{e^{i\mu_n \varepsilon} - 1}{i\mu_n} - \varepsilon \right] e^{i\mu_n t} \quad \text{pour tout } t \in J'.$$

Du simple fait que $|\mu_n| \geq \rho > 0$, il existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on ait l'inégalité

$$(29) \quad |e^{i\mu_n \varepsilon} - 1| = 2 \left| \sin \left(\frac{\mu_n \varepsilon}{2} \right) \right| \leq \varepsilon |\mu_n| (1 - \delta).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la fonction $g(t)$ donnée par le second membre de (28) on déduit de (28) et (29) l'estimation

$$(30) \quad \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \delta^2} \int_{J'} \left| \int_0^\varepsilon [f(t + \eta) - f(t)] d\eta \right|^2 dt.$$

On a d'autre part l'inégalité évidente

$$(31) \quad \int_{J'} \left| \int_0^\varepsilon [f(t + \eta) - f(t)] d\eta \right|^2 dt \leq C_1 \int_J |f(t)|^2 dt$$

En combinant (30) et (31) on obtient

$$(32) \quad \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \leq C_2 \int_J |f(t)|^2 dt.$$

Pour conclure la démonstration il nous suffit d'estimer $|a_0|$. Or on a la formule

$$a_0 - f(t) = - \sum_{n \neq 0} a_n e^{i\mu_n t} =: g_1(t).$$

et d'après l'inégalité de droite dans (21) on en déduit

$$(33) \quad \int_J |a_0 - f(t)|^2 dt = \int_J |g_1(t)|^2 dt \leq C_3 \sum_{n \neq 0} |a_n|^2.$$

De (32) et (33) on déduit

$$(34) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq C_4 \int_J |f(t)|^2 dt.$$

La démonstration est donc achevée par récurrence. Puisque à chaque pas de la récurrence le nombre p diminue au moins d'une unité, il est clair que le nombre de pas est inférieur ou égal à p , lui-même majoré par $q = 2N + 1$. Donc la constante $c = 1/C_4$ intervenant dans (21) dépend bien uniquement de γ, ρ, N et $|J|$ et ceci achève la démonstration du Théorème 4. $\square$

Fin de la démonstration du Lemme 2. Il suffit d'appliquer le Théorème 4 avec $T > 0$ quelconque, $\mu_n = (a^2 + n^2)$ pour $n \geq 1$, $\mu_{-n} = -(a^2 + n^2)$ pour $n \geq 1$, $\mu_0 = 0$ par exemple. On a alors $\mu_{n+1} - \mu_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\mu_{n+1} - \mu_n = 2|n| + 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq 1$. Il est clair que pour avoir (22)-(23) il suffit de choisir $N = N(T) = 1 + \lfloor \pi/T \rfloor$. $\square$

Fin de la démonstration du Théorème 1. On applique le Lemme 2 avec

$$u_n = u_{m,n} = (m^2 \pi^2 l^{-2} + n^2) v_{m,n} w_{m,n}(x, y), \quad a = a_m = \pi m l^{-1}$$

et en intégrant sur ω on trouve alors après sommation en m :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\omega} v_t^2(t, x, y) \, dx \, dy &\geq \gamma \sum_{m,n} (m^2 \pi^2 l^{-2} + n^2)^2 v_{m,n}^2 \\ &\geq \delta \int_{\Omega} |\Delta v(0, x, y)|^2 + |v_t(0, x, y)|^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Ceci permet alors d'achever la démonstration grâce à la méthode HUM. $\square$

4 Quelques remarques et compléments

La démonstration du théorème appelle quelques observations.

1. Même lorsque Ω est un carré, on ne sait pas actuellement s'il est possible de remplacer dans le problème (1)-(2) la tranche ω par un ouvert intérieur. (Dans le cas de l'équation des ondes, on a obtenu dans [4] un contrôle h très singulier à support dans $(0, T) \times \omega$ du type fonctionnelle analytique, mais la difficulté apparaissait déjà pour le contrôle semi-interne.) D'autre part si ω "est un voisinage de $\partial\Omega$ " ou plus généralement ω est de la forme $\Omega \cap W$ où W est un ouvert qui contient deux côtés adjacents, la méthode de E. Zuazua [11] permet d'obtenir la contrôlabilité exacte par une simple méthode de multiplications. Il est clair que le résultat de [11] ne contient pas le Théorème 1, une partie de la méthode de E. Zuazua [11] s'étendant d'ailleurs à l'équation des ondes pour T grand.

2. Lorsque Ω est un carré et que l'on considère le problème

$$(35) \quad y_{tt} + \Delta^2 y = h(t, x) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad y = |\nabla y| = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega$$

les ouverts ω du type "tranche" n'ont pas de raison a priori de jouer un rôle particulier. On ne sait donc pas, dans ce cas, contrôler des données quelconques $(y_0, y_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ au moyen d'un contrôle $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$ à support dans $(0, T) \times \omega$ même si ω est de la forme $\Omega \cap B$.

3. Pour le problème (35), la contrôlabilité exacte "semi-interne" n'est même pas évidente pour T grand. Dans le cas de (1)-(3), la démonstration est beaucoup plus facile pour les grandes valeurs de T (cf. [5]), et cette dernière propriété de contrôlabilité pour $T \geq T_0$ implique déjà la décroissance exponentielle de l'énergie des solutions de

$$(36) \quad v_{tt} + \Delta^2 v + a(x)v_t = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega; \quad v = \Delta v = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty) \times \partial\Omega$$

lorsque $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0$ et $a(x) > 0$ p.p. sur ω .

Il serait intéressant d'étudier le problème de la stabilisation exponentielle des solutions de

$$(37) \quad v_{tt} + \Delta^2 v + a(x)v_t = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega; \quad v = |\nabla v| = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty) \times \partial\Omega$$

lorsque $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0$ et $a(x) > 0$ p.p. sur ω avec $\omega \neq \Omega$.

D'après un résultat de E. Zuazua [11], si ω "est un voisinage de $\partial\Omega$ " ou plus généralement ω est de la forme $\Omega \cap W$ où W est un ouvert qui contient deux côtés adjacents, pour tout $T > 0$ il existe une constante $C = C(T) \geq 0$ telle que les solutions du problème

$$v_{tt} + \Delta^2 v = 0 \quad \text{sur } (0, +\infty) \times \Omega; \quad v = \Delta v = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty) \times \partial\Omega$$

vérifient l'inégalité

$$\int_{\Omega} \{|v_t(0, x)|^2 + |\Delta v(0, x)|^2 + |v(0, x)|^2\} dx \leq C \int_0^T \int_{\omega} |v_t(t, x)|^2 dx dt.$$

En appliquant les résultats de [5], on obtient que dans ce cas toute solution y du problème (35) vérifie

$$\int_{\Omega} \{|y_t(t, x)|^2 + |\Delta y(t, x)|^2 + |y(t, x)|^2\} dx \leq C e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0$$

où δ est indépendant de y et C reste borné avec

$$\int_{\Omega} \{|y_t(0, x)|^2 + |\Delta y(0, x)|^2 + |y(0, x)|^2\} dx.$$

Il serait sans doute intéressant d'étudier une éventuelle généralisation de cette propriété au cas où ω est de la forme $\Omega \cap B$.

Bibliographie

- [1] J. M. BALL et M. SLEMROD, *Nonharmonic Fourier Series and the Stabilization of Distributed Semi-linear Control Systems* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 32, 1979, p. 555-587).
- [2] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH, *Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation des problèmes hyperboliques* (Workshop on "Non-linear Hyperbolic Equations in Applied Science", Turin, juin 1987, Rend. del Seminario di Pisa (à paraître)).
- [3] A. HARAUX, *On a Completion Problem in the Theory of Distributed Control of Wave Equations* (à paraître).
- [4] A. HARAUX, *Contrôlabilité d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée*, C. R. Acad. Sc. Paris, T. 306, Série I (1988), 125-128.
- [5] A. HARAUX, *Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps* (à paraître).
- [6] A. E. INGHAM, *Some Trigonometrical Inequalities with Applications in the Theory of Series* (Math. Z., vol. 41, 1936, p. 367-369).
- [7] J. L. LIONS, *Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems* (The John von Neumann Lecture, S.I.A.M. meeting, Boston, July 1986, S.I.A.M. review, 1988).

- [8] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte de systèmes distribués*, Cours du Collège de France, rédigé par E. Zuazua, R.M.A. Masson, Paris (1988).
- [9] J. L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [10] J. RAUCH et J. SJÖSTRAND (à paraître).
- [11] E. ZUAZUA, *Exact Controllability of Distributed Systems for Arbitrarily Small Time* (à paraître).