

Un théorème de compacité

Note de M. **JEAN-PIERRE AUBIN**, présentée par M. Jean Leray

27 mai 1963

Résumé

L'étude d'équations aux dérivées partielles (en particulier *non linéaires*) conduit, connaissant des estimations *a priori* de la solution, à des problèmes du type suivant : Si $U_n(t) \rightarrow 0$ dans $L^{P_0}(A_0)$ faible, $dU_n/dt \rightarrow 0$ dans $L^{P_1}(A_1)$ faible, quand peut-on affirmer que U_n converge fortement dans un espace de fonctions à valeurs dans un espace intermédiaire entre A_0 et A_1 ? Nous énonçons ici une première réponse à ce problème.

Donnons-nous deux espaces de Banach A_0 et A_m , $A_0 \subset A_m$ avec une topologie plus fine.

Nous entendons par $W = W^{(m)}(P_0, A_0; P_m, A_m)$ ($1 < P_0, P_m \leq \infty$) l'espace des (classes de) fonctions $t \in [0, T] \rightarrow u(t)$ telles que¹

$$(1) \quad u \in L^{P_0}(0, T; A_0); \quad D^m u = u^{(m)}(t) \in L^{P_m}(0, T; A_m)$$

muni de la norme

$$(2) \quad \|u\|_W = \max(\|u\|_{L^{P_0}(A_0)}; \|D^m u\|_{L^{P_m}(A_m)}).$$

Rappelons (voir [2]) que, pour cette norme, W est un espace de Banach dans lequel $\mathcal{C}^{(m)}(0, T; A_0)$ est dense ; l'application

$$u \in \mathcal{C}^{(m)}(A_0) \cap W \rightarrow u^{(j)}(t)$$

se prolonge à W et applique ce dernier espace sur² (voir [2, 3])

$$(3) \quad T_j = T_j^{(m)}(P_0, 0, A_0; P_m, 0, A_m) = S\left(P_0, \frac{1}{P_0} + j, A_0; P_m, \frac{1}{P_m} + j - m; A_m\right).$$

Il en résulte que $D^j u$ est une fonction continue à valeurs dans T_j , donc dans A_m .

Nous nous donnons enfin un espace B avec

$$(4) \quad A_0 \subset B \subset A_m$$

(les inclusions étant algébriques et topologiques) et nous posons le

-
1. La dérivée d'ordre m , $D^m u$ est prise au sens des distributions.
 2. L'espace de moyennes

$$S(P_0, \xi_0, A_0; P_1, \xi_1, A_1) = S(P_0, P_1, \theta; A_0, A_1) \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} \quad (\xi_0, \xi_1 < 0)$$

est l'espace décrit par $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt$ lorsque

$$e^{\theta t} u \in L^{P_0}(A_0) \quad \text{et} \quad e^{(\theta-1)t} u \in L^{P_1}(A_1) \quad (1 \leq P \leq \infty).$$

Problème 1. Supposons l'application $D^j : u \rightarrow D^j u$ définie et continue de W dans un espace $L^P(B)$. Sous quelles conditions cette application est-elle compacte ?

Nous verrons que, parmi celles-ci, il faudra « élargir » $L^P(B)$, soit en « élargissant » l'espace B , soit, si besoin est, en « élargissant » L^P . Les théorèmes suivants s'appuieront essentiellement sur le

Lemme 1. Supposons l'injection de A_0 dans A_m compacte. Si $0 \leq j \leq m-1$, l'application D^j est compacte de W dans $\mathcal{C}(0, T; A_m)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le lemme pour $j = m-1$. Fixons t dans $[0, T]$. Si u parcourt un ensemble borné H de W , $D^{m-1}u(t)$ parcourt un borné de T_{m-1} , donc un ensemble relativement compact de A_m , puisque, l'injection de A_0 dans A_m étant compacte, celle de T_{m-1} dans A_m l'est également [3]. On remarque ensuite (par l'inégalité de Hölder) que

$$(5) \quad \|u^{(m-1)}(t) - u^{(m-1)}(t')\|_{A_m} \leq C \|u^{(m)}\|_{L^{P_m}(A_m)} |t - t'|^{1 - \frac{1}{P_m}},$$

ce qui entraîne que $D^{m-1}u$ décrit une famille équicontinue de $\mathcal{C}(0, T; A_m)$ lorsque $u \in H$. Le théorème d'Ascoli permet de conclure alors le lemme. $\square$

Nous en déduisons le

Théorème 1. Supposons l'application D^j définie et continue de W dans $L^P(B)$, j fixé, $0 \leq j \leq m-1$. Si $\hat{B}$ est tel que

$$(6) \quad B \subset \hat{B} \subset A_m,$$

l'injection de B dans $\hat{B}$ étant compacte, alors D^j est une application compacte de W dans $L^P(\hat{B})$.

Démonstration. L'injection de B dans $\hat{B}$ étant compacte, on peut associer à tout $\varepsilon > 0$ une constante $C(\varepsilon)$ telle que, si $u \in W$, on ait p. p. en t (voir [4])

$$(7) \quad \|u^{(j)}(t)\|_{\hat{B}} \leq \varepsilon \|u^{(j)}(t)\|_B + C(\varepsilon) \|u^{(j)}(t)\|_{A_m}.$$

D'où, en prenant la norme de (7) dans L^P

$$\|u^{(j)}\|_{L^P(\hat{B})} \leq \varepsilon \|u^{(j)}\|_{L^P(B)} + C(\varepsilon) \|u^{(j)}\|_{L^P(A_m)}.$$

Le théorème est alors prouvé, en remarquant que si u_n est une suite faiblement convergente de W , $D^j u_n$ converge faiblement dans $L^P(B)$ par hypothèse et fortement dans $L^P(A_m)$ d'après le lemme. $\square$

Nous aurons à utiliser maintenant le théorème sur les dérivées intermédiaires de [5], affirmant que si $u \in W$, alors $D^j u \in L^{P_j}(\mathcal{C}_j)$,

$$0 \leq j \leq m-1, \quad \frac{1}{P_j} = \frac{1 - \frac{j}{m}}{P_0} + \frac{\frac{j}{m}}{P_m}; \quad \mathcal{C}_j = S\left(\infty, \frac{j}{m}; A_0, A_m\right),$$

en convenant que $\mathcal{C}_0 = A_0$. Nous sommes en mesure de démontrer le

Théorème 2. Supposons toujours l'application D^j définie et continue de W dans $L^P(B)$, j fixé, $0 \leq j \leq m-1$, avec

$$(8) \quad \mathcal{C}_j \subset B \subset A_m,$$

l'injection de $\mathcal{C}_j$ dans B étant compacte. Alors :

- a. Si $P = P_j$, l'application D^j est compacte de W dans $L^P(B)$;
- b. Si $P > P_j$, l'application D^j est compacte de W dans $L^{P-\varepsilon}(B)$, $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Posons, par exemple, $S_\theta = S(q, \theta; \mathcal{C}_j, B)$ et rappelons [3] que si l'injection de $\mathcal{C}_j$ dans B est compacte, celle de S_θ dans B l'est également si $\theta < 1$. Si $u \in W$, on peut écrire p. p. en t

$$(9) \quad \|u^{(j)}(t)\|_B \leq \varepsilon \|u^{(j)}(t)\|_{S_\theta} + C(\varepsilon) \|u^{(j)}(t)\|_{A_m},$$

on remarque alors que $L^{P_j}(\mathcal{C}_j) \cap L^P(B) \subset L^{P_\theta}(S_\theta)$, avec

$$\frac{1}{P_\theta} = \frac{1-\theta}{P_j} + \frac{\theta}{P};$$

on choisit, si $P > P_j$, θ tel que $P_\theta = P - \varepsilon$ et l'on prend alors la norme de (9) dans L^{P_θ} . La démonstration se termine comme précédemment.

Si $P = P_j$, on peut poser $S_\theta = \mathcal{C}_j$ et intégrer (9) dans L^{P_j} . □

Remarque 1. Zaidmann [6] a démontré par d'autres méthodes le point b du théorème 2 pour $j = 0$.

Remarque 2. Nous avons énoncé ces théorèmes dans le cadre où ils sont pratiquement utilisés dans l'étude des équations d'évolution non linéaires. Mais il est à remarquer que ces théorèmes se généralisent au cas où les fonctions de W dépendent de plusieurs variables.

D'autre part, ces théorèmes valent encore lorsque l'application D^j prend ses valeurs dans des espaces fonctionnels autres que $L^P(B)$. Par exemple, les espaces de fonctions continues à valeurs dans B , les « Banach Lattice » de Calderon [7], parmi lesquels on trouve les espaces L^P avec poids positifs, les espaces d'Orlicz, les espaces de Lorentz, etc.

Exemple 1. Prenons $j = 0$ pour simplifier. On démontre que si $u \in W$, alors

$$u \in L^{P_\theta}(S(q, \theta; A_0, A_m)),$$

avec

$$0 < \theta_0 = \frac{\frac{1}{P_0}}{\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_m} + m} \quad \text{et} \quad P_\theta = \frac{P_0}{1 - \frac{\theta}{\theta_0}}.$$

On déduit des théorèmes précédents que l'injection de W dans $L^{P_\theta - \varepsilon}(S(q, \theta; A_0, A_m))$ est compacte.

Références

- [1] –
- [2] J.-L. LIONS, *Math. Scand.*, 1961, p. 147-177.
- [3] J.-L. LIONS, J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publications mathématiques de l'IHES, Volume 19, p. 5-68, 1964.
- [4] J.-L. LIONS, *Équations différentielles-opérationnelles et problèmes aux limites*, Springer, (collect. Jaune), 111, 1961, p. 59.
- [5] J.-L. LIONS, *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 4343.
- [6] ZAIDMANN (sous presse). Ce théorème est démontré dans un article de L. Amério à paraître aux *Ann. de Mat.*, 1963.
- [7] CALDERON Conférences au Collège de France, décembre 1962.